FAMILIEN HOLOMORPHER VEKTORRAUMBÜNDEL ÜBER DER PROJEKTIVEN GERADEN UND UNZERLEGBARE HOLOMORPHE 2-BÜNDEL ÜBER DER PROJEKTIVEN EBENE

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Gerhard Mülich
aus Bad Hall, Österreich

Göttingen 1974

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41534917_0005

FAMILIEN HOLOMORPHER VEKTORRAUMBÜNDEL ÜBER DER PROJEKTIVEN GERADEN UND UNZERLEGBARE HOLOMORPHE 2-BÜNDEL ÜBER DER PROJEKTIVEN EBENE

Dissertation
zur Erlangung des Doktorgrades
der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Georg-August-Universität zu Göttingen

vorgelegt von

Gerhard Mülich
aus Bad Hall, Österreich

Göttingen 1974

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

- D7 -
Referent: Prof. Dr. H.Grauert
Korreferent: Prof. Dr. O.Riemenschneider

Tag der mündlichen Prüfung: 2. Mai 1974

Inhaltsverzeichnis

Einleitung ..... Seite 1

Kapitel I
Familien holomorpher Vektorraumbündel über $\mathbb{P}^1$

§ 1 Geradenbündel über $X = U \times \mathbb{P}^1$ 5

§ 2 Ein Spaltungssatz für reduzierte Bündel 7

§ 3 Schnitte in reduziblen Bündeln $E \to X = U \times \mathbb{P}^1$ 12

§ 4 Spaltungsverhalten reduzibler Bündel 15

§ 5 Teilbündel von $E \to X = U \times \mathbb{P}^1$ 23

§ 6 Das Isomorphieproblem 30

Kapitel II
Beispiele für nicht uniforme 2-Bündel über der projektiven Ebene 37

Literaturverzeichnis 53

Einleitung

Sei $U = \{(u_1, u_2, \ldots, u_m) \mid |u| < r\}$ ein Polyzylinder um den Nullpunkt im m-dimensionalen komplexen Zahlenraum $\mathbb{C}^m$ mit $0 < r \leq \infty$.

$\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ bezeichne die komplex-projektive Gerade. z sei inhomogene Koordinate von $\mathbb{P}^1$ und $\mathfrak{U} = \{U_0, U_\infty\}$ mit $U_0 = \{z \neq \infty\}$, $U_\infty = \{z \neq 0\}$ die Standardüberdeckung des $\mathbb{P}^1$.

Wir betrachten holomorphe Vektorraumbündel E, F, ..., L, M, ... über $X = U \times \mathbb{P}^1$. Sei $\mathfrak{V} = \{V_0, V_\infty\}$ mit $V_i = U \times U_i, i = 0, \infty$, dann gibt es zu jedem Bündel $E \xrightarrow{p} X$ vom Rang n eine Trivialisierung bzgl. $\mathfrak{V}$, d.h. es gibt bijektive Abbildungen

$$\phi_0 : E|V_0 \to V_0 \times \mathbb{C}^n, \quad \phi_\infty : E|V_\infty \to V_\infty \times \mathbb{C}^n$$

mit $\phi_i(e) = (p(e), w_i)$, $i = 0, \infty$,

und eine holomorphe Abbildung $\varphi_{0\infty} : V_0 \cap V_\infty \to GL(n, \mathbb{C})$, so daß für $x = (u,z) \in V_0 \cap V_\infty = U \times \{0 < |z| < \infty\}$, $w_i \in \mathbb{C}^n$, die Beziehung besteht:

$$\phi_0 \cdot \phi_\infty^{-1}(x, w_\infty) = (x, \varphi_{0\infty}(x) \cdot w_\infty) = (x, w_0).$$

Wir nennen $\varphi = \varphi_{0\infty}$ einen Zykel von E und schreiben für obigen Sachverhalt

$$E \sim \varphi.$$

Gilt $E \sim \varphi$, $F \sim \psi$, so sind E und F genau dann isomorph, wenn es holomorphe Abbildungen

$$\varphi_0 : V_0 \to GL(n, \mathbb{C}), \quad \varphi_\infty : V_\infty \to GL(n, \mathbb{C})$$

gibt, so daß über $V_0 \cap V_\infty$ gilt $\psi = \varphi_0 \cdot \varphi \cdot \varphi_\infty$.

Zu vorgegebenem φ kann man E konstruieren mit $E \sim \varphi$, wobei E also bis auf Isomorphie eindeutig festgelegt ist; wir unterscheiden i.a. nicht zwischen Bündeln und ihren Isomorphieklassen.

G. Birkhoff bewies im Jahre 1913 in [4] für $X = \mathbb{P}^1$:

Zu jeder solchen Matrix φ gibt es φ_0 und φ_∞, so daß

$$\psi = \varphi_0 \circ \varphi \circ \varphi_\infty = \begin{pmatrix} z^{k_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & z^{k_n} \end{pmatrix}$$

eine Diagonalmatrix ist und die ganzen Zahlen $k_1, k_2, \ldots, k_n$ bis auf Permutation eindeutig durch φ bestimmt sind.

Im Jahre 1957 bewies A. Grothendieck in [6] dieses Resultat, formuliert in der Sprache der Vektorraumbündel:

Jedes Vektorraumbündel über $\mathbb{P}^1$ zerfällt in eine direkte Summe von Geradenbündeln, die Summanden sind bis auf Anordnung und Isomorphie eindeutig bestimmt.

H. Röhrl hat 1961 in [9] dieses Resultat auf Bündel über $X = U \times \mathbb{P}^1$ erweitert:

Jedes Bündel $E \to X$ zerfällt über $X' = (U - A) \times \mathbb{P}^1$ in eine direkte Summe von Geradenbündeln, dabei ist A eine 1-codimensionale analytische Menge in U oder leer.

Röhrl behauptet weiter:
Es gibt eindeutig bestimmtes minimales A, es ist das Komplement des maximalen offenen Teils von U, so daß für diese u die Beschränkungen E_u von E auf die Faser über u gleiches Spaltungsverhalten zeigen.

Diese Aussage ist falsch, wie durch Gegenbeispiele gezeigt werden soll.

Es soll zunächst ein (elementarer) Beweis geliefert werden, der gleichzeitig die oben zitierten Sätze von Birkhoff-Grothendieck und Röhrl erbringt.

Dazu bringt man die Zykel des Bündels E auf eine gewisse Normalform (die auch eine verselle Deformation von E_o liefert, ohne den allgemeinen Existenzsatz von Kodaira zu benutzen). Dann wird ein Kalkül vorgestellt, der es gestattet, das Spaltungsverhalten von E_u aus der Normalform zu berechnen.

Im Fall von 2-Bündeln werden die analytischen Mengen in U, auf denen E_u gleiches Spaltungsverhalten zeigt, explizit durch Gleichungen und auch geometrisch beschrieben, und zwar durch Kegelmengen über gewissen Sekantenvarietäten.

Man erhält eine vollständige Beschreibung einer Stratifizierung der lokalen Modulräume von Hirzebruchflächen, wie sie T. Suwa in [14] versucht hat.

Die Halbstetigkeitssätze für die Dimension der Kohomologie mit Koeffizienten in E werden dabei nochmals bewiesen, man bekommt jedoch genaue Aussagen über die Sprungstellen (Theoreme I, II).

Dann wird das (lokale) Isomorphieproblem für 2-Bündel über $U \times \mathbb{P}^1$ untersucht:

Zwei Bündel sind genau dann in einer Umgebung der Faser $\{0\} \times \mathbb{P}^1$ isomorph, wenn sie längs dieser Faser formal isomorph sind (Theorem III).

Das 2. Kapitel ist im wesentlichen unabhängig vom ersten. Es enthält eine Reihe von Beispielen für nicht uniforme 2-Bündel über der komplex-projektiven Ebene. Dabei heißt ein unzerlegbares Bündel uniform (siehe [10]), wenn es auf allen Geraden der Ebene gleich zerfällt. Nicht uniforme 2-Bündel sind für die Konstruktion von Mannigfaltigkeiten, die keine vollständigen Durchschnitte sind, von Interesse.

Anregungen und Ideen zu diesem Kapitel verdanke ich Herrn Prof. Dr. A. Van de Ven, dem mein herzlicher Dank gilt.

KAPITEL I FAMILIEN HOLOMORPHER VEKTORRAUMBÜNDEL ÜBER $\mathbb{P}^1$

§ 1 Geradenbündel über $X = U \times \mathbb{P}^1$

Wir betrachten die speziellen Zykel zu 1.6), die für $k \in \mathbb{Z}$ gegeben sind durch

$$\varphi^k(x) = \varphi^k(u,z) = z^k$$

Satz 1.1

Zu jedem Geradenbündel $L \to X$ gibt es genau ein $k \in \mathbb{Z}$ mit $L \sim z^k$.

Insbesondere sind also Deformationen von Geradenbündeln über $\mathbb{P}^1$ mit glatter Basis starr, Isomorphieklassen von stetigen und holomorphen Geradenbündeln stehen in Bijektion zueinander.

Der Vollständigkeit wegen sei der einfache Beweis aus [9] reproduziert. $L \sim \varphi$, wo $\varphi(x) = \varphi(u,z)$ holomorph und nullstellenfrei auf $U \times \{0 < |z| < \infty\}$.

$k = \frac{1}{2\pi i} \int_K d \ln \varphi$ bezeichne die Änderung des Arguments von φ bei einem einfachen, positiv orientierten Umlauf K um 0.

$\ln \frac{\varphi}{z^k} = \ln \varphi - k \ln z$ ist dann holomorph und eindeutig auf $U \times \{0 < |z| < \infty\}$ und kann in eine Laurentreihe entwickelt werden. Laurenttrennung liefert:

$$\ln \frac{\varphi}{z^k} = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} a_\nu(u)\, z^\nu = \sum_{\nu \geq 0} a_\nu(u)\, z^\nu + \sum_{\nu < 0} a_\nu(u)\, z^\nu =$$

$= f_0(u,z) + f_\infty(u,z)$ mit in u holomorphen Funktionen a_ν, bzw.

Es gilt

$$\varphi = e^{f_o} \; z^k \; e^{f_\infty},$$

k ist eine topologische Invariante und heißt der Grad von L. Wir schreiben für ein Bündel vom Grade k von nun an stets L^k, mit L werde L^1 bezeichnet.

Dann ist, schreibt man $L \otimes L \otimes \ldots \otimes L$ (k-mal) als L^k, die Bezeichnung offenbar konsistent.

Ein Schnitt s in L^k wird durch ein Paar $a_o = \phi_o \cdot (s|V_o)$, $a_\infty = \phi_\infty \cdot (s|V_\infty)$ von auf V_o, V_∞ holomorphen Funktionen gegeben, für die über $U \times \{o < |z| < \infty\}$ gilt:

$$a_o(u,z) = z^k \; a_\infty(u,z)$$

Potenzreihenentwicklung nach z bzw. $\frac{1}{z}$ liefert Darstellungen

$$a_o(u,z) = \sum_{\nu \geq o} a_\nu^o(u) z^\nu, \quad a_\infty(u,z) = \sum_{\nu \leq o} a_\nu^\infty(u) z^\nu$$

mit in U holomorphen Funktionen a_ν^o, a_ν^∞ .

Koeffizientenvergleich liefert:

$$a_o(u,z) = a_o^o + a_1^o z + \ldots + a_k^o z^k$$

$$a_\infty(u,z) = a_o^\infty + a_{-1}^\infty z^{-1} + \ldots + a_{-k}^\infty z^{-k}$$

$$a_\nu^o = a_{\nu-k}^\infty \; ; \; \nu = 0,1,\ldots,k.$$

Mit den gleichen Methoden erhält man, wenn $\mathcal{O}(U)$ den Modul der auf U holomorphen Funktionen bezeichnet:

Satz 1.2.

(i) $H^0(X, L^k) \approx (k+1)\mathcal{O}(U)$ für $k \geq 0$, $= 0$ sonst,

(ii) $H^1(X, L^k) \approx (-k-1)\mathcal{O}(U)$ für $k < 0$, $= 0$ sonst,

(iii) $H^q(X, L^k) = 0$ für $q \geq 2$ und alle $k \in \mathbb{Z}$.

Der Satz gilt natürlich auch für $X = \mathbb{P}^1$, $\mathcal{O}(U) = \mathbb{C}$

In den folgenden Paragraphen betrachten wir der Einfachheit wegen nur Bündel E, F,... vom Rang 2. Die Ergebnisse lassen sich auf Bündel höheren Ranges verallgemeinern.

§ 2 Ein Spaltungssatz für reduzierte Bündel

Ein Bündel $E \to X$ (vom Rang 2) heiße reduzibel, falls gilt:

$$E \sim \varphi = \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ 0, & \gamma \end{pmatrix}$$

Dann gilt natürlich auch $E \sim \psi$, wenn ψ aus φ durch Zeilen- oder Spaltenvertauschung hervorgegangen ist.
Ein Bündel E ist genau dann reduzibel, wenn es ein echtes Teilbündel $L \subset E$ besitzt (s. § 5).

Nach Satz 1.1 gibt es zu α, β Zahlen k_1, $k_2 \in \mathbb{Z}$, holomorphe, nullstellenfreie Funktionen α_0, α_∞ und γ_0, γ_∞ mit $z^{k_1} = \alpha_0\alpha\alpha_\infty$, $z^{k_2} = \gamma_0\gamma\gamma_\infty$. Sei ψ definiert durch:

$$\psi = \begin{pmatrix} z^{k_1}, & \beta \\ 0, & z^{k_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_0, & 0 \\ 0, & \gamma_0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha, & \beta \\ 0, & \gamma \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \alpha_\infty, & 0 \\ 0, & \gamma_\infty \end{pmatrix}$$

β besitzt über $U \times \{0 < |z| < \infty\}$ eine Entwicklung:

$$\beta(u,z) = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} a_\nu(u)\, z^\nu \quad , \quad a_\nu \text{ holomorph in } U.$$

$$\beta_o(u,z) := - \sum_{\substack{\nu \geq o \\ \nu > k_1 - k_2}} a_{\nu+k_2}\, z^\nu \quad , \quad \beta_\infty(u,z) = - \sum_{\nu \leq o} a_{\nu+k_1}\, z^\nu$$

sind dann holomorph in V_o bzw. V_∞ und man erhält

$$\psi = \begin{pmatrix} z^{k_1}, & a_{k_1+1} z^{k_1+1} + \ldots + a_{k_2-1} z^{k_2-1} \\ 0, & z^{k_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z^{k_1}, & \beta + z^{k_1}\beta_\infty + z^{k_2}\beta_o \\ 0, & z^{k_2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1, & \beta_o \\ 0, & 1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} z^{k_1}, & \beta \\ 0, & z^{k_2} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 1, & \beta_\infty \\ 0, & 1 \end{pmatrix} .$$

Somit ist gezeigt:

Satz 2.1.

E sei reduziert über $X = U \times \mathbb{P}^1$, dann gilt $E \sim \varphi$,

$$\varphi = \begin{pmatrix} z^{k_1}, & a_{k_1+1} z^{k_1+1} + \ldots + a_{k_2-1} z^{k_2-1} \\ 0, & z^{k_2} \end{pmatrix} \quad , \; a_\varkappa \in \mathcal{O}(U).$$

Gilt insbesondere $k_2 - k_1 \leq 1$, so hat man eine Isomorphie $E \approx L^{k_1} \oplus L^{k_2}$.

Wir beweisen nun ein wichtiges

Lemma 2.2.

Sei $k_1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_n < k_2 \quad ; i_\nu \in \mathbb{Z}$;

$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ seien von Null verschiedene Elemente eines $\mathbb{C}$ umfassenden Ringes R.

Dann gibt es Matrizen φ_o, φ_∞ folgender Art:

(i) Die Elemente von φ_o bzw. φ_∞ sind aus $R_{\alpha_n}[z]$ bzw. $R_{\alpha_n}\left[\frac{1}{z}\right]$

(ii) $\det \varphi_o = \det \varphi_\infty = 1$

(iii)
$$\varphi_o \cdot \begin{pmatrix} z^{k_1}, \alpha_1 z^{i_1} + \alpha_2 z^{i_2} + \ldots + \alpha_n z^{i_n} \\ 0\ , \qquad\qquad z^{k_2} \end{pmatrix} \cdot \varphi_\infty = \begin{pmatrix} z^{i_1}, \beta_1 z^{j_1} + \ldots + \beta_m z^{j_m} \\ 0\ , \qquad z^{k_1+k_2-i_1} \end{pmatrix}$$

mit $i_1 < j_1 < j_2 < \ldots < j_m < k_1 + k_2 - i_1$ und $\beta_\mu \in R_{\alpha_n}$.

Für den Beweis sei ohne Einschränkung $k_1 = o$ angenommen. Mit $a_1 = z^{k_2}$, $a_2 = \alpha_1 z^{i_1} + \ldots + \alpha_n z^{i_n}$ erhält man nach Division mit Rest $q_1, q_2, \ldots, q_{l-1}, a_3, a_4, \ldots, a_l \in R_{\alpha_n}[z]$ mit

$$a_1 = q_1 a_2 + a_3,$$
$$a_2 = q_2 a_3 + a_4,$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$a_{l-2} = q_{l-2} a_{l-1} + a_l,$$
$$a_{l-1} = q_{l-1} a_l,$$

wo $a_1 = z^{i_1}$ ein größter gemeinsamer Teiler von a_1, a_2 ist.

Ohne Einschränkung für das Folgende konnen wir l als gerade annehmen.

Setzt man $Q_1 = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -q_1, & 1 \end{pmatrix}$, $Q_2 = \begin{pmatrix} 1, & -q_2 \\ 0, & 1 \end{pmatrix}, \ldots, Q_{l-1} = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ -q_{l-1}, & 1 \end{pmatrix}$,

und $Q = Q_{l-1} \cdot Q_{l-2} \cdot \ldots \cdot Q_2 \cdot Q_1$,

so erhält man die Gleichung

$$Q \cdot \begin{pmatrix} 1 & a_2 \\ 0, & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_2, & a_1 \\ b_1, & 0 \end{pmatrix} .$$

wo $b_2 \in R_{\alpha_n}[z]$ und $b_1 = z^{k_1+k_2-i_1}$,

denn $\det Q = 1$, $\det \begin{pmatrix} 1, & a_2 \\ 0, & a_1 \end{pmatrix} = z^{k_1+k_2}$.

Es folgt $E \sim \begin{pmatrix} z^{i_1}, & b_2 \\ 0, & z^{k_1+k_2-i_1} \end{pmatrix}$.

Nach Satz 2.1. kann man b_2 in zulässiger Weise durch $\beta_1 z^{j_1} + \ldots + \beta_m z^{j_m}$ ersetzen, damit ist das Lemma bewiesen.

Durch endliche wiederholte Anwendung des Lemmas erhält man:

Satz 2.3.

Sei $k_1 < i_1 < i_2 < \ldots < i_n < k_2$ eine monotone Sequenz ganzer Zahlen. $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ seien von Null verschiedene Elemente

eines $\mathbb{C}$ umfassenden Ringes R.

Dann gibt es l_1, $l_2 \in \mathbb{Z}$, ein von endlich vielen Elementen in R erzeugtes multiplikatives System $S \subset R$, und Matrizen φ_0, φ_∞ folgender Art:

(i) Die Elemente von φ_0 bzw. φ_∞ sind aus $R_S[z]$ bzw. $R_S[\frac{1}{z}]$

(ii) $\det \varphi_0 = \det \varphi_\infty = 1$

(iii) $$\varphi_0 \cdot \begin{pmatrix} z^{k_1}, a_1 z^{i_1} + \ldots + a_n z^{i_n} \\ 0\,, \qquad z^{k_2} \end{pmatrix} \cdot \varphi_\infty = \begin{pmatrix} z^{l_1}, & 0 \\ 0, & z^{l_2} \end{pmatrix} \quad \text{mit } k_1 \leq l_1; l_2 \leq k_2;$$
$$l_1 + l_2 = k_1 + k_2 \,.$$

Setzt man $R = \mathbb{C}$ und beachtet, daß über Riemannschen Flächen jedes Bündel reduzibel ist, so folgt der Satz von Birkhoff und Grothendieck:

Satz 2.4.

Jedes Vektorraumbündel $E \to \mathbb{P}^1$ (vom Rang 2) zerfällt zu

$$E \approx L^{k_1} \oplus L^{k_2} \,.$$

Natürlich sind k_1, k_2 bis auf Anordnung eindeutig bestimmt, wie man etwa sofort sieht, wenn man $d(l) = \dim \Gamma(E \otimes L^l)$ betrachtet.

Die Zahlen k_1, k_2 können mit obigem Verfahren berechnet werden, es folgt z.B. sofort:

Lemma 1.6.

$$E \sim \varphi = \begin{pmatrix} 1, & a \\ 0, & z^k \end{pmatrix}, a = a_{i+1} z^{i+1} + \ldots + a_{k-1} z^{k-1}, a_{i+1} \neq 0,$$

mit

$$i \geq \begin{cases} \frac{k}{2} & \text{, für k gerade} \\ \frac{k-1}{2} & \text{, für k ungerade} \end{cases}$$

so gilt:

$$E \approx L^{i} \oplus L^{k-i} .$$

Im allgemeinen ist der Kalkül jedoch schwer zu handhaben. Es soll deshalb in § 4 ein gut praktikables Verfahren zur Berechnung von k_1, k_2 angegeben werden.
Später wird gezeigt, daß $E \to U \times \mathbb{P}^1$ für [illegible] reduzibel ist.
Mit $R = \mathcal{O}(U)$ ergibt sich der Satz von Röhrl.

§ 3 Schnitte in reduziblen Bündeln $E \to X = U \times \mathbb{P}^1$

Gelte $E \sim \varphi = \begin{pmatrix} z^{k_1}, & \alpha \\ 0, & z^{k_2} \end{pmatrix}$, $\alpha = \alpha_{k_1+1} z^{k_1+1} + \ldots + \alpha_{k_2-1} z^{k_2-1}$, $\alpha_\varkappa \in \mathcal{O}(U)$.

Schnitte in E werden gegeben durch Paare auf V_0 bzw. V_∞ holomorpher Funktionen (a_0, b_0), (a_∞, b_∞), so daß über $U \times \{0 < |z| < \infty\}$ gilt:

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} = \varphi \cdot \begin{pmatrix} a_\infty \\ b_\infty \end{pmatrix}, \text{ d.h.} \begin{cases} a_0 = z^{k_1} a_\infty + \alpha\, b_\infty \\ \alpha_\infty = z^{k_2} b_\infty \end{cases}$$

Mit den Reihenentwicklungen

$$a_o = \sum_{\nu \geq o} a_\nu^o z^\nu, b_o = \sum_{\nu \geq o} b_\nu^o z^\nu, a_\infty = \sum_{\nu \leq o} a_\nu^\infty z^\nu, b_\infty = \sum_{\nu \leq o} b_\nu^\infty z^\nu; a_\nu^o, a_\nu^\infty, b_\nu^o, b_\nu^\infty \in \mathcal{O}(U)$$

folgt durch Koeffizientenvergleich:

Satz 3.1.
Gelte $E \sim \varphi = \begin{pmatrix} z^{k_1}, & \alpha \\ 0 & , z^{k_2} \end{pmatrix}$; α wie oben, $k_2 - k_1 > 1$.

$\Gamma(X, E)$ ist isomorph zu einem Untermodul
$L \subset \Gamma(X, L^{k_1} \oplus L^{k_2})$,
Im einzelnen gilt:

(i) Für $-1 \leq k_1 < k_2 - 1$ gilt

$\Gamma(X,E) \approx \Gamma(X, L^{k_1} \oplus L^{k_2})$, diese Isomorphie erhält man wie folgt:

Sei $(a_o^\infty, a_{-1}^\infty, \ldots, a_{-k_1}^\infty, b_o^\infty, b_{-1}^\infty, \ldots, b_{-k_2}^\infty) \in (k_2+k_1+2)\mathcal{O}(U)$

gegeben (für $k_1 = -1$ nehme man $(b_o^\infty, \ldots, b_{-k_2}^\infty)$).

Dann definiere man $(a_{-k_1-1}^\infty, \ldots, a_{-k_2+1}^\infty)$ durch

$$\begin{pmatrix} a_{-k_1-1}^\infty \\ a_{-k_1-2}^\infty \\ \vdots \\ a_{-k_2+1}^\infty \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} \alpha_{k_1+1}, \alpha_{k_1+2}, \ldots, \alpha_{k_2-1} \\ 0 \quad , \alpha_{k_1+1}, \ldots, \alpha_{k_2-2} \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ 0 \qquad\qquad 0 \quad \alpha_{k_1+1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_{-k_1-2}^\infty \\ b_{-k_1-3}^\infty \\ \vdots \\ b_{-k_2}^\infty \end{pmatrix}$$

Mit $a_\infty = a_o^\infty + a_{-1}^\infty z^{-1} + \ldots + a_{-k_2+1}^\infty z^{-k_2+1}$

$$b_\infty = b_o^\infty + b_{-1}^\infty z^{-1} + \ldots + b_{-k_2}^\infty z^{-k_2}$$

und $\begin{pmatrix} a_o \\ b_o \end{pmatrix} = \varphi \circ \begin{pmatrix} a_\infty \\ b_\infty \end{pmatrix}$ erhalten wir in (a_o, b_o), (a_∞, b_∞) einen Schnitt in E und diese Zuordnung definiert einen $\mathcal{O}(U)$-Isomorphismus.

(ii) Für $k_1 + 1 < 0 \leq k_2$ erhalten wir einen Isomorphismus auf $L \subset (k_2+1)\,\mathcal{O}(U) = \Gamma(X, L^{k_2}) \approx \Gamma(X, L^{k_1} \oplus L^{k_2})$, wo L aus den $(k_2 + 1)$-tupeln $(b_o^\infty, b_{-1}^\infty, \ldots, b_{-k_2}^\infty)$ besteht, die die Relationen erfüllen:

$$\begin{pmatrix} a_{k_1+1}, a_{k_1+2}, \ldots\ldots\ldots, a_{k_1+k_2+1} \\ a_{k_1+2}, a_{k_1+3}, \ldots\ldots\ldots, a_{k_1+k_2+2} \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{-1}, \quad a_o, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_{k_2-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_o^\infty \\ b_{-1}^\infty \\ \vdots \\ b_{-k_2}^\infty \end{pmatrix} = \underline{0}$$

Dieser Isomorphismus wird durch die Zuordnung von $(b_o^\infty, b_{-1}^\infty, \ldots, b_{-k_2}^\infty) \in (k_2+1)\,\mathcal{O}(U)$ zu (a_o, b_o), (a_∞, b_∞) gegeben mit

$$b_\infty = b_o^\infty + b_{-1}^\infty z^{-1} + \ldots + b_{-k_2}^\infty z^{-k_2} \qquad \text{und}$$

$$a_\infty = 0 \quad \text{für} \quad k_2 = 0,$$

$$a_\infty = a_o^\infty + a_{-1}^\infty z^{-1} + \ldots + a_{-k_2+1}^\infty z^{-k_2+1}$$

mit :

$$\begin{pmatrix} a_0^\infty \\ a_{-1}^\infty \\ \vdots \\ a_{-k_2+1} \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} \alpha_{k_1+1}, \alpha_{k_1+2}, \ldots, \alpha_{k_1+k_2} \\ 0 \quad , \alpha_{k_1+1}, \ldots, \alpha_{k_1+k_2+1} \\ \vdots \\ 0 \quad \cdots \quad 0 \quad \alpha_{k_1+1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_{-1}^\infty \\ b_{-2}^\infty \\ \vdots \\ b_{-k_2}^\infty \end{pmatrix},$$

L ist also i.a. nicht frei.

(iii) Für $k_1 < k_2 < o$ gilt $\Gamma(X,E) = 0$.

Der Satz gilt natürlich auch für $X = \mathbb{P}^1$, $\mathcal{O}(U) = \mathbb{C}$.

§ 4 Spaltungsverhalten reduzibler Bündel

Gelte $E \sim \varphi = \begin{pmatrix} 1, \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{k-1} z^{k-1} \\ 0 , \quad z^k \end{pmatrix}$,

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathbb{C} \text{ bzw. } \alpha_1, \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathcal{O}(U)$$

Wir definieren Matrizen $\mathcal{A}_i$, $i = 1, \ldots, k-1$, durch

$$\mathcal{A}_i = \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-i} \\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{k-i+1} \\ \vdots \\ \alpha_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{k-1} \end{pmatrix}$$

Man hat $\mathcal{A}_i = (\mathcal{A}_{k-i-1})^t$ und wir beschränken uns i.f. auf $i = 1,2,\ldots,r$ mit $r = \frac{k-1}{2}$, für ungerades k, $r = \frac{k}{2}$ für gerades k.

a) Im folgenden gelte $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{k-1} \in \mathbb{C}$, E sei also Bündel über $\mathbb{P}^1$.

Nach Satz 2.4 gilt $E \approx L^{k_1} \oplus L^{k_2}$ mit $0 \leq k_1; k_2 \leq k$, $k_1 + k_2 = k$ und $k_1 = 0$, $k_2 = k$ genau dann, wenn $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_{k-1} = 0$.

Es soll nun ein praktikables Verfahren zur Berechnung von k_1, k_2 aus $\alpha_1,\ldots,\alpha_{k-1}$ angegeben werden.

Nach Satz 1.2. gilt für $l \in \mathbb{Z}$:

$$d(l) = \dim \Gamma(X,E \otimes L^l) = \dim \Gamma(L^{k_1+l}) + \dim \Gamma(L^{k_2+l})$$

$$= \max(0, k_1+l+1) + \max(0,k_2+l+1).$$

In Abhängigkeit von l erhält man also:

$$d(l) = \begin{cases} 0 & , l \leq -k_2 - 1 \\ d(l+1)-1 & , k_2-k_1 \leq l \leq k_2 \\ d(l+1)-2 & , l < k_2-k_1 \end{cases}$$

Andererseits gilt nach Satz 3.1.

$$d(l) = \begin{cases} 0 & , k+l < 0 \\ k+l+1-\operatorname{rg} \mathcal{A}_{-l-1}, & l+1 < 0 \leq k+l \\ k+2l+2 & , -1 \leq l < k+l \end{cases}$$

Die Dimension d(l) springt zum ersten Mal um 2, wenn $\mathcal{A}_{-l-1}$ nicht mehr maximalen Rang hat.

Satz 4.1.

Für das Bündel $E \to \mathbb{P}^1$ gelte

$$E \sim \varphi = \begin{pmatrix} 1, & \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{k-1} z^{k-1} \\ 0, & z^k \end{pmatrix}$$

Dann zerfällt $E \approx L^{k_1} \oplus L^{k_2}$ mit

$k_1 = \min \{\rho \mid rg\ \mathcal{A}_{\rho+1} < \rho + 1 ;\ \rho = 0,1,2,\ldots,r\}$ und $k_2 = k - k_1$.

Bemerkung:

In [14] versucht T. Suwa, die allgemeine Faser der versellen Deformation von Hirzebruchflächen zu bestimmen. Seine speziellen Ergebnisse und eine vollständige Lösung des Problems ergeben sich hier sofort:

Ist $E \sim \varphi = \begin{pmatrix} 1, & t_1 z + t_2 z^2 + \ldots + t_{k-1} z^{k-1} \\ 0, & z^k \end{pmatrix}$, und $P(E)$

das zu E assoziierte projektive Bündel, so ist $P(E) \to T$ mit $T = \mathbb{C}^{k-1} = \{(t_1, t_2, \ldots, t_{k-1})\}$ die bekannte verselle Deformation von $P(E)_o = P(E_o) = \sum_k$

Es gilt $P(E)_t = P(E_t) = \sum_{|k-2|}$ genau dann, wenn für $t = (t_1, t_2, \ldots, t_{k-2})$ gilt:

(i) $\quad rg\ \mathcal{A}_{l+1}(t) < l + 1,$

(ii) $\quad rg\ \mathcal{A}_l(t) = l$

D.h. in der geometrischen Formulierung des nachfolgenden Satzes 4.2. $P(E)_t = \overline{\sum}_{|k-21|}$ genau dann, wenn t in dem Kegel über dem Sekantenbündel Θ_1, aber nicht schon in dessen Θ_{l-1} liegt.

Gilt $E \sim \varphi = \begin{bmatrix} 1, & \alpha \\ 0, & z^k \end{bmatrix}$, so auch $E \sim \begin{bmatrix} 1, & \lambda\alpha \\ 0, & z^k \end{bmatrix}$ mit $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

Der Rang der $\mathfrak{A}_i$ wird durch diese Multiplikation natürlich eben falls nicht geändert.

Gilt also nicht $\alpha = 0$, d.h. $E \not\approx L^0 \oplus L^k$, so kann man E eindeutig den Punkt $p \in \mathbb{P}^{k-2}$ mit den homogenen Koordinaten

$$p = [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}]$$ zuordnen.

Wir schreiben dann $E = E(p)$ oder $E = E(\alpha)$. Den Bundeln mit gleichem Spaltungsverhalten entsprechen dabei algebraische Mengen, die nun geometrisch beschrieben werden sollen.

Sei Θ_1 die durch $\operatorname{rg} \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-2} \\ \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{k-1} \end{pmatrix} = 1$

definierte rationale Normkurve im $\mathbb{P}^{k-2}$.

Sie ist rational, singularitätenfrei, von der Ordnung $k - 2$, und durch diese Eigenschaften projektiv eindeutig bestimmt.

Satz 4.1. besagt $E(\alpha) \approx L \oplus L^{k-1}$ genau für $\alpha \in \Theta_1$.

Sind $p_1, p_2, \ldots, p_j$ Punkte auf Θ_1, so versteht man unter der j-Sekante von Θ_1 durch diese Punkte den von diesen aufgespannten linearen Teilraum der Dimension $(j-1)$ von $\mathbb{P}^{k-2}$; dabei hat man, fallen etwa r dieser Punkte in p zusammen, diese durch den Θ_1 in p r-fach berührenden Raum zu ersetzen.

Θ_i, $i = 2,3,\ldots,r$, sei die Menge der i-Sekanten an Θ_1.

Satz 4.2.

(i) $\Theta_i = \{ [\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{k-1}] \in \mathbb{P}^{k-2} \mid rg\, \mathcal{A}_{i+1} < i+1 \; ; \; i = 1,2,\ldots,r \}$

(ii) Θ_i ist auf kanonische Weise ein projektives Faserbündel mit Faser $\mathbb{P}^{i-1}$ über dem i-fachen symmetrischen Produkt $S^i(\mathbb{P}^1) \approx \mathbb{P}^i$, insbesonders dim $\Theta_i = 2i-1$.

(iii) $\mathcal{U}_{i-1}$ sei das projektive universelle Teilbündel von $G_{i-1,k-2} \times \mathbb{P}^{k-2}$ über der Graßmannmannigfaltigkeit $G_{i-1,k-2}$ der (i-1)-dimensionalen projektiven Teilräume von $\mathbb{P}^{k-2}$.

$S^i(\mathbb{P}^1)$ ist kanonisch in $G_{i-1,k-2}$ eingebettet, indem man dem Tupel $(p_1,\ldots,p_i) \in S^i(\mathbb{P}^1)$ den von $p_1,\ldots,p_i$ auf Θ_1 aufgespannten $\mathbb{P}^{i-1}$ zuordnet.

Θ_i ist die Einschränkung von $\mathcal{U}_{i-1}$ auf $S^i(\mathbb{P}^1)$.

(iv) $E(\alpha) \approx L^1 \oplus L^{k-i}$ genau dann, wenn $\alpha \in \Theta_1$, $\alpha \notin \Theta_{i-1}$

Beweis zu 4.2.

rg $\mathcal{A}_{i+1} < i+1$ gilt genau dann, wenn es ein

$u = (u_{i+1}, u_i, \ldots, u_1) \neq 0$ gibt mit (*) $u \cdot \mathcal{A}_{i+1} = 0$

Ohne Einschränkung sei $u_{i+1} \neq 0$, $u_1 \neq 0$ (andernfalls) $u_{i+1} = 1$ normiert.

Wäre $u_{i+1} = 0$ oder $u_1 = 0$, so kann man von

$u = (0, \ldots, u^1_{j+1}, \ldots, u^1_1, 0, 0)$ zu $u' = (u^1_{j+1}, \ldots, u^1_1)$ mit

$u^1_{j+1} \neq 0$, $u^1_1 \neq 0$ übergehen und von $\mathcal{A}_{i+1}$ zu $\mathcal{A}_{j+1}$, indem man einige Spalten von $\mathcal{A}_{i+1}$ streicht. Man ist dann in derselben Situation wie oben, nur mit kleinerem Index.

Sei $z^i + u_i z^{i-1} + \ldots + u_1 = (z - w_1)(z - w_2)\ldots(z - w_i)$.

Die u_i sind also bis auf Vorzeichen die elementarsymmetrischen Funktionen der w_i.

Der Einfachheit wegen beschränken wir uns auf den "allgemeinen" Fall $w_j \neq w_\varkappa$ für $j \neq \varkappa$. Die anderen Fälle erhält man daraus durch Grenzübergang.

Sei $p_1 = [1, w_1, w_1^2, \ldots]$

$p_2 = [1, w_2, w_2^2, \ldots]$

$\vdots$

$p_i = [1, w_i, w_i^2, \ldots]$.

Das sind i Punkte auf $\theta_{n,i}$, die einen $\mathbb{P}^{i-1}$ aufspannen, gerade die Faser über $(w_1, w_2, \ldots, w_i) \in \mathbb{P}^{(i)}$.

Das Gleichungsystem (*) ist äquivalent zu

$$(**) \qquad rg \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots\ldots, \alpha_{k-1} \\ 1, w_1, w_1^2, \ldots\ldots\ldots, w_1^{k-2} \\ 1, w_2, w_2^2, \ldots\ldots\ldots, w_2^{k-2} \\ \vdots \\ 1, w_i, w_i^2, \ldots\ldots\ldots, w_i^{k-2} \end{pmatrix} < i + 1 \quad ,$$

d.h. $[\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1}]$ liegt auf der i-Sekante durch $p_1, \ldots, p_i$.

Die Aussagen (ii), (iii) sind nun trivial (und wohlbekannt [10]), (iv) folgt aus Satz 4.1.

b) Sei nun $E = E(\alpha)$ mit $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \in \mathcal{O}(U)$.

$A_i = \{u \in U | rg\, \mathcal{O}_{i+1}(u) < i+1\}$ ist eine analytische Menge in U

und es gilt

$A_o \subset A_1 \subset \ldots \subset A_r \subset U$

Sei A_{i_1} die erste nicht-leere Menge in dieser Reihe (falls es überhaupt eine gibt).

A_{i_2} sei dann die erste A_{i_1} echt umfassende Menge dieser Reihe, usw.

Wir bekommen analytische Mengen

$$A_{i_1} \subsetneq A_{i_2} \subsetneq \ldots\ldots \subsetneq A_{i_s} = U$$

Zusammenfassend erhält man folgenden Satz:

Theorem I

$E \to X = U \times \mathbb{P}^1$ sei ein reduzibles Bündel vom Rang 2.

Dann gilt für $E_u := E|\{u\} \times \mathbb{P}^1$

(i) $E_u \approx L^{k_1(u)} \oplus L^{k_2(u)}$ mit von u abhängigen ganzen Zahlen k_1, k_2.

Die Numerierung sei i.f. so gewählt daß $k_1(u) \leq k_2(u)$ gilt.

(ii) $k_1(u) + k_2(u) = k$ ist konstant auf U.

(iii) $k_2(u)$ ist halbstetig nach oben, $k_2(u) \leq k_2(0)$,

in der Nähe von 0.

$k_1(u)$ ist halbstetig nach unten.

(iv) $\dim H^q(X_u, E_u)$ ist halbstetig nach oben.

(v)
$$E_u \approx L^{i_1} \oplus L^{k-i_1} \quad \text{für } u \in A_{i_1},$$
$$E_u \approx L^{i_2} \oplus L^{k-i_2} \quad \text{für } u \in A_{i_2} - A_{i_1},$$
$$\vdots$$
$$E_u \approx L^{i_s} \oplus L^{k-i_s} \quad \text{für } u \in A_{i_s} - A_{i_{s-1}},$$

falls $E_o = L^o \oplus L^k$.

(vi) Es gibt eine 1-Codimensionale analytische Menge A in U,

so daß $E|(U-A) \times \mathbb{P}^1 \approx L^{i_s} \oplus L^{k-i_s}$ global zerfällt.

Wann $A = A_{i_{s-1}}$ und eindeutig bestimmt ist, wird in § 5 mit aufwendigeren Methoden untersucht werden.

§ 5 Teilbündel von $E \to X = U \times \mathbb{P}^1$

$P(E)$ bezeichne das zu E assoziierte Bündel über X mit Faser $\mathbb{P}^1$. Die Teilbündel von E stehen in Bijektion zu den Schnitten von $P(E)$; ist $s \in \Gamma(X,P(E))$, so ist $s(x)$ eine Gerade in der Faser von E über x und $\bigcup_{x\in X} s(x)$ Bündelraum eines Geradenbündels $L^k \to X$.

Ist andererseits $L^k \subset E$ gegeben, so gibt es Koordinaten mit

$$L^k \sim z^k, \quad E \sim \begin{pmatrix} z^k, & \beta \\ 0, & \gamma \end{pmatrix} .$$

Sind $w_i^{(1)}$, $w_i^{(2)}$, $i = o,\infty$, Faserkoordinaten von E, so

$$z_i = \frac{w_i^{(1)}}{w_i^{(2)}}$$

von $P(E)$, und der ∞-Schnitt $w_i^{(2)} = 0$ definiert L^k.

$P(E)$ kann identifiziert werden mit $\{E \otimes L^k | k \in \mathbb{Z}\}$
Es gilt $L^k \subset E$ genau dann, wenn $1 = L^o \subset E \otimes L^{-k}$,
also wenn $E \otimes L^{-k}$ einen nullstellenfreien Schnitt besitzt
(Bild des 1-Schnittes in 1).

(a)
Sei zunächst $E = E_o$ ein 2-Bündel über P^1, $E \approx L^{k_1} \oplus L^{k_2}$.

$P(E) = \sum_{|k_1-k_2|}$ ist dann eine rationale Regelfläche, auch Hirzebruchfläche genannt, die genau eine irreduzible rationale Kurve C von negativem Selbstschnitt besitzt, $C^2 = -|k_1 - k_2|$. Schnitte von $P(E)$ sind die irreduziblen rationalen Kurven auf $P(E)$, die keine Fasern sind.

Diese Kurven sind schon frühzeitig untersucht worden. Faßt man sie als Teilbündel von E auf, so gilt, wie Van de Ven in [15] gezeigt hat:

Satz 5.1.

Sei $E = L^{k_1} \oplus L^{k_2}$ mit $k_1 \leq k_2$.

Es gilt $L^k \subset E$ genau dann, wenn

$$k = k_2 \quad \text{oder} \quad k \leq k_1 .$$

Ist $k_2 > k_1$, so ist L^{k_2} das einzige Teilbündel vom Grad k_2 (also nicht nur bis auf Isomorphie bestimmt).

(b)

Dieses Resultat soll nun auf $E \to U \times \mathbb{P}^1$ ausgedehnt werden, E sei also ein 2-Bündel über $U \times \mathbb{P}^1$.

Theorem II

(i) Zu E gibt es $V = V(0) \subset U$, so daß für $Y = V \times \mathbb{P}^1$ gilt: $E \to Y$ ist reduzibel; damit gelten für E die Aussagen des Theorems I.

(ii) Gelte $E_u \approx L^{k_1(u)} \oplus L^{k_2(u)}$, $k_1(u) \leq k_2(u)$.
Zu jedem $k \leq k_1(0)$ gibt es ein $V = V(0) \subset U$, so daß über $Y = V \times \mathbb{P}^1$ gilt: $L^k \subset E$.

(iii) $L^{k_2(0)}$ läßt sich genau dann zu einem Teilbündel über $Y \subset X$ fortsetzen, wenn $E \approx L^{k_1(0)} \oplus L^{k_2(0)}$ global zerfällt. Gilt $k_2(0) > k_1(0)$, so ist $L^{k_2(0)}$ eindeutig bestimmt (nicht nur bis auf Isomorphie).

(iv) Genau dann, wenn (mit den Bezeichnungen aus Theorem I) $A_{i_{s-1}}$ 1-codimensional ist, gilt:

$E \approx L^{k_1} \oplus L^{k_2}$ über $X' = (U - A_{i_{s-1}}) \times \mathbb{P}^1$

und $A = A_{i_{s-1}}$ ist eindeutig bestimmt.

(v) Es gibt E, so daß $\operatorname{codim} A_{i_{s-1}} > 1$, für solche E gilt:

Ist A eine Hyperfläche in U mit $A_{i_{s-1}} \subset A$, so zerfällt E global auf $(U - A) \times \mathbb{P}^1$:

$$E|(U - A) \times \mathbb{P}^1 \approx L^{k_1} \oplus L^{k_2} .$$

Falls $k_2 > k_1$ besitzt E über $(U - A_{s_{i-1}}) \times \mathbb{P}^1$ ein Teilbündel L^{k_2}.

(vi) Gilt für analytisches $A \subset U$ mit $\operatorname{codim} A > 1$ die Zerfällung $E|(U - A) \times \mathbb{P}^1 \approx L^{k_1} \oplus L^{k_2}$, so auch $E \approx L^{k_1} \oplus L^{k_2}$ über ganz $U \times \mathbb{P}^1$.

Beweis:

Wir zeigen zunächst, daß E lokal reduzibel ist:

Grauert und Remmert bewiesen in [5] mit Hilfe eines Cartanschen Heftungs-Lemmas folgenden Hilfssatz:

Sei $X = U \times \mathbb{P}^1$ wie oben, W eine kohärente analytische Garbe über X, dann gibt es ein k_o, so daß für $k \geq k_o$ gilt:

$$H^q(X, W \otimes L^k) = 0, \qquad q \geq 1 .$$

Sei nun I die Idealgarbe von $\{0\} \times \mathbb{P}^1$ in X. Dann hat man für alle k eine exakte Sequenz

$$0 \to I \otimes E \otimes L^k \to E \otimes L^k \xrightarrow{r_k} E_o \otimes L_o^k \to 0$$

mit zugehöriger exakter Kohomologiesequenz

$$\ldots \to \Gamma(X, E \otimes L^k) \xrightarrow{r_k} \Gamma(\mathbb{P}^1, E_o \otimes L_o^k) \to H^1(X, I \otimes E \otimes L^k) \to \ldots,$$

dabei ist r_k die Restriktionsabbildung. Nach obigem Hilfssatz ist r_k für $k \geq k_o$ surjektiv. Nach Satz 4.1 kennt man die Teilbündel $E_o \otimes L_o^k$; man hat

$$L_o^{k_1} \subset E_o \otimes L_o^k$$

für alle $k_1 \leq k_2$, wo k_2 eine feste Schranke sei.

Somit hat $E_o \otimes L^{k-k_1}$ stets einen nullstellenfreien Schnitt für $k \geq k_o$ und $k_1 \leq k_2$. Für $k - k_1 \geq k_o$ können wir diesen fortsetzen zu einem Schnitt über X, der natürlich über $Y = V \times \mathbb{P}^1$ mit kleinem V nullstellenfrei bleibt.

E ist also lokal reduzibel und man hat die Halbstetigkeitsaussage aus Theorem I zur Verfügung. Damit läßt sich obiges Resultat verbessern:

Sei $k \leq k_1(0)$,

$$\dim \Gamma(X_u, E_u \otimes L^{-k}) = \dim \Gamma(L^{k_2(u)-k} \oplus L^{k_1(u)-k}) = k_1(u)+k_2(u)+2-2k$$

ist nach Theorem I unabhängig von u.

Nach Kodaira-Spencer [7] kann jeder Schnitt $s_o \in \Gamma(X_o, E_o \otimes L^{-k})$ zu einem Schnitt $s \in \Gamma(U \times \mathbb{P}^1, E \otimes L^{-k})$, U klein, fortgesetzt werden.

Mit Satz 5.1. folgen (ii) und (iii)

Nun zum Beweis von (iv) und (v), für den wir eine Fallunterscheidung machen.

(1) Gelte $k_2 > k_1$.
Sei $U' = U - A_{s_{i-1}}$, $p : U' \times \mathbb{P}^1 \to U'$ die Projektion.

Zu jedem $u \in U'$ gibt es eine Umgebung $U_1 = U_1(u)$, so daß E_u für alle $u \in U_1$ gleich zerfällt. Ist U_1 klein genug, so gilt nach (i) und Theorem I: $E|U_1 \approx L^{k1} \oplus L^{k2}$.

Nach Satz 5.1. sind die $L_u^{k_2} \subset E_u$ einzig. Die Bündel L^{k_2} auf $U_1(u)$ passen also über den Durchschnitten der $U_1(u)$, $u \in U'$, zusammen zu <u>einem</u> Bündel $L^{k_2} \subset E$ über $U' \times \mathbb{P}^1$.

U' bezeichne nun das Komplement einer Hyperfläche A in U, dies ist ein Steinscher Raum. Mit Cartans Theorem B folgt:

$$H^1(U' \times \mathbb{P}^1, L^{k_2-k_1}) \approx H^1(U', p_*(L^{k_2-k_1})) = 0$$

(Nach Satz 1.1 ist $p_*(L^{k_2-k_1})$ eine lokalfreie Garbe über U').

Die Ausdehnung $0 \to L^{k_2} \to E \to L^{k_1} \to 0$ spaltet also über $U' \times \mathbb{P}^1$.

(2) Gelte $k_2 = k_1$,

dann nehmen wir ohne Einschränkung $k_1 = k_2 = 0$ an.
Sei wieder $U' = U - A_{i_{s-1}}$. Nach [5] (bzw. [7]) ist p_*E eine lokalfreie Garbe über U' mit Faser $\Gamma(X_u, E_u)$ über $u \in U'$ und der kanonische Garbenhomomorphismus

$$p^* p_* E \to E$$

ist surjektiv. Nach dem bisher Bewiesenen kann man das allerdings ohne die Sätze aus [5], [7] direkt einsehen.
Wegen der Rechtsexaktheit des Tensorprodukts bei Moduln ist dann auch der zugehörige Vektorraumbündelhomomorphismus

$$p^* p_* E \to E$$

surjektiv, wegen $\dim \Gamma(L^0 \oplus L^0) = 2$ ist $p_* E$ ein Vektorraumbündel vom Rang 2 und obiger Homomorphismus ist ein Isomorphismus.

Ist U' steinsch, so zerfällt das Bündel $p_* E$ über U' in eine direkte Summe von Geradenbündeln, damit auch $E \approx p^* p_* E$.

Nun ein Beispiel mit codim $A_{i_{s-1}} > 1$:

Wir betrachten $E \to \mathbb{C}^2 \times \mathbb{P}^1$ mit

$$E \sim \varphi \quad , \quad \varphi = \begin{pmatrix} 1, & u_1 z + u_2 z^2 \\ 0, & z^3 \end{pmatrix}$$

Es gilt $E_0 \approx L^0 \oplus L^3$, aber $E_u \approx L^1 \oplus L^2$ für alle $u = (u_1, u_2) \neq 0$.

Ist $A \subset \mathbb{C}^2$ eine Kurve durch den Nullpunkt, so gilt

$$E|(\mathbb{C}^2 - A) \times \mathbb{P}^1 \approx L^1 \oplus L^2.$$

E zerfällt aber nicht global über $(\mathbb{C} - \{0\}) \times \mathbb{P}^1$ wie etwa aus (vi) folgt.

Nun zum Beweis von (vi):

Für die Bündel $E \to U \times \mathbb{P}^1$ und $L^{k_1} \oplus L^{k_2} \to U \times \mathbb{P}^1$ besteht über $(U - A) \times \mathbb{P}^1$ ein Isomorphismus, der sich wegen des Riemannschen Hebbarkeitssatzes zu einem Homomorphismus

$$E \to L^{k_1} \oplus L^{k_2}$$

über $U \times \mathbb{P}^1$ fortsetzen läßt.

Gelte $E \sim \varphi$. Obiger Homomorphismus wird gegeben durch zwei Matrizen A_0 und A_∞ von auf V_0 bzw. V_∞ holomorphen Funktionen mit

$$A_0 \circ \varphi = \begin{pmatrix} z^{k_1}, & 0 \\ 0, & z^{k_2} \end{pmatrix} \cdot A_\infty$$

Wegen Satz 1.1. gilt $\det \varphi = z^{k_1+k_2}$, also $\det A_0 = \det A_\infty$. $d = \det A_0$ ist also eine auf ganz U holomorphe Funktion, deren Nullstellenmenge leer oder 1-codimensional ist. Wegen codim $A > 1$ haben wir also einen globalen Isomorphismus.

§ 6 Das Isomorphieproblem

Wir betrachten wieder $X = U \times \mathbb{P}^1$ mit $0 \in U$.
$0^e \times \mathbb{P}^1$, $e \in \mathbb{N}$, sei die (e-1)-te infinitesimale Umgebung von $\{0\} \times \mathbb{P}^1$ in $U \times \mathbb{P}^1$. Sie ist definiert durch die e-te Potenz der maximalen Idealgarbe von 0 in U.

$0^\infty \times \mathbb{P}^1 = \varprojlim 0^e \times \mathbb{P}^1$ bezeichnen wir als formale Umgebung der Faser $\{0\} \times \mathbb{P}^1$ in $U \times \mathbb{P}^1$. Die Beschränkung von E hierauf sei definiert durch $E|0^\infty \times \mathbb{P}^1 = \varprojlim E|0^e \times \mathbb{P}^1$.
E und F heißen formal isomorph längs der Faser $0 \times \mathbb{P}^1$, wenn gilt: $E|0^\infty \times \mathbb{P}^1 \approx F|0^\infty \times \mathbb{P}^1$.

Theorem III

E, F seien holomorphe Vektorraumbündel (vom Rang 2) über $X = U \times \mathbb{P}^1$. Es gelte

$$E|0^\infty \times \mathbb{P}^1 \approx F|0^\infty \times \mathbb{P}^1,$$

dann gibt es eine Umgebung $V = V(0) \subset U$, so daß über $V \times \mathbb{P}^1$ gilt:

$$E|V \times \mathbb{P}^1 \approx F|V \times \mathbb{P}^1 .$$

Zum Beweis beachten wir, daß nach Theorem II eine Umgebung $U_1 = U_1(0)$ existiert, so daß E und F über $U_1 \times \mathbb{P}^1$ reduzibel sind. Nach Voraussetzung sind E und F insbesondere über $\{0\} \times \mathbb{P}^1$ isomorph.
Ohne Einschränkung können wir annehmen:

$E \approx$

Nach Satz 2.1. und Lemma 2.2. können wir E und F über $U_1 \times \mathbb{P}^1$ wie folgt beschreiben:

$$E \sim \varphi = \begin{pmatrix} 1, & -\alpha \\ 0, & z^k \end{pmatrix} , \qquad F \sim \psi = \begin{pmatrix} 1, & \beta \\ 0, & z^k \end{pmatrix} ,$$

wo $\alpha(u,z) = \alpha_1(u)z+\ldots+\alpha_{k-1}(u)z^{k-1}$ mit $\alpha_\varkappa(0) = 0$,

und $\beta(u,z) = \beta_1(u)z+\ldots+\beta_{k-1}(u)z^{k-1}$ mit $\beta_\varkappa(0) = 0$.

Ein Homomorphismus $h : E \to F$ wird gegeben durch einen Schnitt in dem durch

$$\chi = \varphi \otimes \psi \cdot \frac{1}{\det \varphi}$$

bestimmten 4-Bündel $G \approx E \otimes F \otimes (\det E)^* \approx E^* \otimes F \approx \mathrm{Hom}\,(E,F)$.

Es gilt über $U \times \{0 < |z| < \infty\}$ genau dann

$$\begin{pmatrix} a^0 \\ b^0 \\ c^0 \\ d^0 \end{pmatrix} = \chi \cdot \begin{pmatrix} a^\infty \\ b^\infty \\ c^\infty \\ d^\infty \end{pmatrix}$$

mit in V_0 holomorphen a^0, b^0, c^0, d^0 bzw. in V_∞ holomorphen a^∞, b^∞, c^∞, d^∞, wenn dort gilt:

$$(*) \qquad \begin{pmatrix} c^0, & a^0 \\ d^0, & b^0 \end{pmatrix} \cdot \varphi = \psi \cdot \begin{pmatrix} c^\infty, & a^\infty \\ d^\infty, & d^\infty \end{pmatrix} \quad ; \text{ d.h. explizit:}$$

(1) $d^0 = z^k d^\infty$

(2) $c^0 = c^\infty + \beta d^\infty$

(3) $b^0 = b^\infty + \alpha d^\infty$

(4) $z^k a^0 = a^\infty + \beta b^\infty + \alpha(c^\infty + \beta d^\infty)$

Schreibt man (*) als $h_\infty \varphi = \psi h_\infty$, so kann wegen
$\det \varphi = \det \psi \neq 0$ $\det h_0 = \det h_\infty$ als eine auf $U \times \mathbb{P}^1$ holomorphe Funktion aufgefaßt werden, die somit in $z \in \mathbb{P}^1$ konstant ist.

$h = (h_0, h_\infty) \in \Gamma(X, \mathrm{Hom}(E, F))$ liefert genau dann einen Isomorphismus über X, wenn $\det h_0(u, 0) = \det h_\infty(u, 0) \neq 0$ gilt.
Ist man an Isomorphismen über $X = U \times \mathbb{P}^1$ mit kleinem U interessiert, so genügt es also nachzurechnen: $\det h_\infty(0,0) \neq 0$.

Für α, β mit $\alpha_i(0) = \beta_i(0) = 0$ reduziert sich Gleichung (4) auf $z^k a^0(0,z) = a^\infty(0,z)$, also muß $a^\infty(0,z) = a^0(0,z) = 0$ gelten und man bekommt $\det h_\infty(0,0) = c_0^\infty(0) \cdot b_0^\infty(0)$, also

Lemma 6.1.

Ein Homomorphismus $h : E \to E$, beschrieben wie oben durch eine Matrix

$$h_\infty = \begin{pmatrix} c^\infty, & a^\infty \\ d^\infty, & b^\infty \end{pmatrix},$$

liefert genau dann einen Isomorphismus, wenn

$c^\infty(0,0) \cdot c_0^\infty(0) \neq 0$, $b^\infty(0,0) \cdot b_0^\infty(0) \neq 0$.

Die Gleichungen (1) - (4) besagen: Ein Schnitt (c^0, c^∞) in E und ein Schnitt (b^0, b^∞) in F definieren einen Homomorphismus $E \to F$, wenn sie in dem Quotientenbündel L^k auf denselben Schnitt projeziert werden und noch gewisse (k-1)-Relationen erfüllen. Im einzelnen gilt:

Satz 6.2.

(i) $(a^\infty, b^\infty, c^\infty, d^\infty)$ definieren genau dann einen Homomorphismus $E \to F$, wenn gilt:

(a) $d^\infty = d_0^\infty + d_{-1}^\infty z^{-1} + \ldots + d_{-k}^\infty z^{-k}$ mit $d^\infty \in \mathcal{O}(U)$

(b) $c^\infty = c_0^\infty + c_{-1}^\infty z^{-1} + \ldots + c_{-k+1}^\infty z^{-k+1}$ mit $c_\varkappa^\infty \in \mathcal{O}(U)$

und

$$\begin{pmatrix} c_{-1}^\infty \\ c_{-2}^\infty \\ \vdots \\ c_{-k+1}^\infty \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{k-1} \\ 0, \beta_1, \ldots\ldots, \beta_{k-2} \\ \vdots \\ 0 \ldots\ldots\ldots 0, \beta_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d_{-2}^\infty \\ d_{-3}^\infty \\ \vdots \\ d_{-k}^\infty \end{pmatrix}$$

(c) $b^\infty = b_0^\infty + b_{-1}^\infty z^{-1} + \ldots + b_{-k+1}^\infty z^{-k+1}$ mit $b_\varkappa^\infty \in \mathcal{O}(U)$

und

$$\begin{pmatrix} b_{-1}^\infty \\ b_{-2}^\infty \\ \vdots \\ b_{-k+1}^\infty \end{pmatrix} = (-1) \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{k-1} \\ 0, \alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_{k-2} \\ \vdots \\ 0 \ldots\ldots 0, \alpha_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d_{-2}^\infty \\ d_{-3}^\infty \\ \vdots \\ d_{-k}^\infty \end{pmatrix}$$

(d) $a^\infty = a_0^\infty + a_{-1}^\infty z^{-1} + \ldots + a_{-k+2}^\infty z^{-k+2}$ mit

$$\begin{pmatrix} a_0^\infty \\ a_{-1}^\infty \\ \vdots \\ a_{-k+2}^\infty \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1, \beta_2, \ldots\ldots, \beta_{k-1} \\ 0, \beta_1, \ldots\ldots, \beta_{k-2} \\ \vdots \\ 0 \ldots\ldots 0, \beta_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots, \alpha_{k-1} \\ 0, \alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_{k-2} \\ \vdots \\ 0, 0, \ldots, 0, \alpha_1 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d_{-2}^\infty \\ d_{-3}^\infty \\ \vdots \\ d_{-k}^\infty \end{pmatrix}$$

und damit die folgenden (k-1) Relationen erfüllt sind:

$$(**)\qquad \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{k-1} \\ g_{k-2} \\ \vdots \\ g_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{k-1} \\ f_{k-2} \\ \vdots \\ f_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e_{k-1}, e_k, \ldots, e_{2k-2}, 0 \\ e_{k-2}, e_{k-1}, \ldots, e_{2k-2} \\ \vdots \\ e_2, \ldots \\ 0, e_2, \ldots, e_{k+1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} d_0^\infty \\ d_{-1}^\infty \\ \vdots \\ d_{-k}^\infty \end{pmatrix}$$

dabei sind die Bezeichnungen wie folgt gewählt:

$\alpha \cdot \beta = e_{2k-2} z^{2k-2} + \ldots + e_2 z^2$ und

$$\begin{pmatrix} g_{k-1} \\ \vdots \\ g_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_{k-1}, 0, \ldots, 0 \\ \beta_{k-2}, \beta_{k-1}, \\ \vdots \\ \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{k-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_0^\infty \\ b_{-1}^\infty \\ \vdots \\ b_{-k+2}^\infty \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} f_{k-1} \\ \vdots \\ f_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{k-1}, 0, \ldots, 0, 0 \\ \vdots \\ \alpha_1, \ldots, \alpha_{k-1} \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} c_0^\infty \\ c_{-1}^\infty \\ \vdots \\ c_{-k+2}^\infty \end{pmatrix}$$

Ein Homomorphismus $h : E|0^\infty \times \mathbb{P}^1 \to F|0^\infty \times \mathbb{P}^1$ wird wie in (*) durch Matrizen h_0 und h_∞ beschrieben, deren Elemente nun Schnitte in der Strukturgarbe von $0^\infty \times \mathbb{P}^1$ sind. Es ist klar, daß für Isomorphie wieder das Determinantenkriterium gilt. Lemma 6.1. gilt also analog für formale Isomorphie, ebenso Satz 6.2.

Nach Voraussetzung gibt es somit eine formale Lösung $b_o^\infty, c_o^\infty, d_o^\infty, \ldots, d_{-k}^\infty$ der Relationen (**) mit $b_o^\infty(0) \neq 0 \neq c_o^\infty(0)$.

Nach dem Approximationssatz von Artin [3] gibt es dann eine Umgebung $U_2 = U_2(0) \subset U_1$, so daß über U_2 auch eine konvergente Lösung $b_o^\infty, c_o^\infty, d_o^\infty, \ldots, d_{-k}^\infty \in \mathcal{O}(U_2)$ der Relationen (**) existiert, die mit der formalen Lösung bis zu beliebig hoher Ordnung übereinstimmt, die also insbesondere die Nebenbedingung $b_o^\infty(0) \neq 0 \neq c_o^\infty$ erfüllt.

Mit 6.1. und 6.2. bekommen wir also eine Umgebung $U_3 = U_3(0) \subset U_2$, so daß über $U_3 \times \mathbb{P}^1$ die Bündel E und F isomorph sind.

Formale Isomorphie nachzuweisen ist i.a. jedoch nicht leicht. Für eindimensionalen Parameterraum U und k = 2,3 kann jedoch eine komplette Lösung des Isomorphieproblems gegeben werden. Gelte $E \sim \varphi$, $F \sim \psi$ mit $\varphi = \varphi(\alpha)$, $\psi = \psi(\beta)$ wie oben $\alpha_i(u) = u^{r_i} e_i(u)$, $\beta_i(u) = u^{s_i} g_i(u)$ mit $0 < r_i, s_i \leq \infty$ und Einheiten e_i, g_i. Dann lauten die Relationen (**) für k = 2 bzw. k = 3

$$(**)_2 \qquad 0 = \beta_1 b_o^\infty + \alpha_1 c_o^\infty + \alpha_1\beta_1 d_{-1}^\infty$$

$$(**)_3 \quad \begin{cases} 0 = \beta_1 b_o^\infty + \alpha_1 c_o^\infty + \alpha_1\beta_1 d_{-1}^\infty - \alpha_2\beta_2 d_{-3}^\infty \\ 0 = \beta_2 b_o^\infty + \alpha_2 c_o^\infty + \alpha_1\beta_1 d_o^\infty + (\alpha_1\beta_2 + \alpha_2\beta_1) d_{-1}^\infty + \alpha_2\beta_2 d_{-2}^\infty \end{cases}$$

Die Lösbarkeit dieser Relationen ist zwar etwas mühsam nachzurechnen, aber man erhält:

Satz 6.3.

(i) Sei $k = 2$.
E und F sind über $U \times \mathbb{P}^1$, U klein, genau dann isomorph, wenn $r_1 = s_1$

(ii) Sei $k = 3$.
E und F sind über $U \times \mathbb{P}^1$, U klein, genau in den folgenden Fällen isomorph:

(a) $r_1 = s_1$ und $r_1 + s_1 \leq \min(r_2, s_2)$,

(b) $r_2 = s_2$ und $r_2 + s_2 \leq \min(r_1, s_1)$,

(c) $r_1 = s_1$, $r_2 = s_2$ und

$$\frac{\alpha_1}{\beta_1} = \frac{\alpha_2}{\beta_2} \mod (u^{\min(2r_1 - r_2, 2r_2 - r_1)})$$

Die Notwendigkeit dieser Bedingungen ist trivial einzusehen. Sind sie erfüllt, ist es nicht schwer, direkt Lösungen für $(**)_1$, $(**)_2$ anzugeben. Bei $(**)_2$ mache man dazu geeignete Fallunterscheidungen und setze bei den Lösungen etwa drei geeignete Parameter Null.

Für $k > 3$ ist die Lage komplizierter.
Selbst wenn die α_j mit den β_i (modulo einer Einheit) bis zu hoher Ordnung übereinstimmen, kann man dadurch nicht gleiches Zerfällungsverhalten von E und F erzwingen.

KAPITEL II

BEISPIELE FÜR UNZERLEGBARE BÜNDEL ÜBER DER PROJEKTIVEN EBENE

$\mathbb{P}^2$ bezeichne die komplex-projektive Ebene, $\mathbb{P}_2^*$ die dazu duale der Geraden $l \subset \mathbb{P}^2$.

$E \to \mathbb{P}^2$ sei ein holomorphes Vektorraumbündel vom Rang 2. Für $l \subset \mathbb{P}^2$ gelte $E|l \approx L^{k_1(l)} \oplus L^{k_2(l)}$. Sei $k(l) = |k_1(l) - k_2(l)|$ $k_1(l)$, $k_2(l)$, $k(l)$ sind entweder alle von l abhängig oder keine dieser Zahlen ist von l abhängig.

Satz 2.1.

Ist $k(l)$ nicht konstant in l, so gibt es eine analytische Menge $A \subset \mathbb{P}_2^*$, so daß $k(l)$ konstant auf $\mathbb{P}_2^* - A$ ist. Weiter ist $k(l)$, $l \notin A$, minimal unter allen $k(l)$. Ist $k(l)$ nicht konstant auf A, so gibt es eine endliche Menge $B \subset A$, so daß $k(l)$ konstant auf $A - B$ ist. Außerdem ist $k(l)$, $l \in A - B$, minimal unter den $k(l)$, $l \in A$.

Der Beweis ergibt sich aus Kapitel I, wenn man folgende Situation betrachtet:
T sei das (kontravariante) Tangentialbündel von $\mathbb{P}^2$, $\pi_1 : P(T) \to \mathbb{P}^2$ das zu T assoziierte projektive $\mathbb{P}^1$-Bündel. $P(T)$ ist die Fahnenmannigfaltigkeit aller Paare (p,l), $p \in l$, von Linienelementen im $\mathbb{P}^2$ und ebenso das projektive Tangentialbündel von $\mathbb{P}_2^*$.
$\pi_2 : P(T) \to \mathbb{P}_2^*$ sei dessen Projektion.

Man wende die Ergebnisse aus Kapitel I auf das Bündel $\pi_1^* E$ an, es kann als Familie von 2-Bündeln über $\mathbb{P}^1$ aufgefaßt werden.

Ausnahmemengen $A' \subset P(T)$, deren π_2-Projektionen A_{π} dann ebenfalls 2.1. erfüllen.

Eine Klassifizierung der 2-Bündel über $\mathbb{P}^n$ sollte folgende Fragen beantworten:

(i) Welche Ausnahmemengen A, B kommen überhaupt vor?

(ii) Welche Zerfällungszahlen $k(l)$ treten auf, welchen Relationen sind sie unterworfen?

(iii) Wann sind Bündel mit gleichem Zerfällungsverhalten isomorph?

Meines Wissens ist keine dieser Fragen weitgehend beantwortet. Im folgenden werden einige bekannte Sätze zusammengestellt, mit deren Hilfe spezielle unzerlegbare Bündel konstruiert und untersucht werden. Die Beispiele zeigen, daß es viele nicht isomorphe Bündel mit gleichem Zerfällungsverhalten gibt.

T_n sei das Tangentialbündel vom $\mathbb{P}^n$, $L = L_n$ das Hyperebenenbündel des $\mathbb{P}^n$, es besitzt einen holomorphen Schnitt, der genau auf einer Hyperebene des $\mathbb{P}^n$ von 1. Ordnung verschwindet.

Satz 2.2.

(i) T_n besitzt keine echten Teilbündel.

(ii) Für $n \geq 2$ ist T_n nicht Einschränkung eines Vektorraumbündels über $\mathbb{P}^{n+1}$

(iii) $H \subset \mathbb{P}^n$ sei eine Hyperebene, dann gilt

$$T_n|H \approx T_{n-1} \oplus N,$$

dabei ist $N \approx L_{n-1}$ das Normalenbündel von H in $\mathbb{P}^n$.

(iv) $r^n \subset \mathbb{P}^n$ sei eine rationale Normkurve. $p_1, p_2, \ldots, p_n$ seien n verschiedene Punkte auf r^n. Für jeden Punkt $p \in r^n$ bilden die Geraden durch p und p_i n unabhängige Richtungen, welche eine Zerlegung

$$T_n | r^n \approx L_1^{n+1} \oplus \ldots \oplus L_1^{n+1}$$

definieren.

(v) X sei eine Untermannigfaltigkeit des $\mathbb{P}^n$ positiver Dimension, welche in keiner Hyperebene enthalten ist. Die Hyperebenen mögen aus X ein vollständiges lineares System ausschneiden. Dann zerfällt $T|X$ genau dann, wenn X eine rationale Kurve ist.

Ein Beweis von (i) ist in [6] , von (ii) in [17] gegeben.
Die Aussagen (iii) bis (v) finden sich in [13] .
Wir benutzen nur 2.2. (iv) für n = 2:

Ist $l \subset \mathbb{P}^2$ eine Gerade, so gilt $T|l \approx L^1 \oplus L^2$,
ist $r^2 \subset \mathbb{P}^2$ ein regulärer Kegelschnitt, so gilt $T|r^2 \approx L^3 \oplus L^3$

Man sieht, die Bündel T und $L_2^1 \oplus L_2^2$ haben zwar überall gleiches Spaltungsverhalten, sind aber nicht isomorph. Die Ausnahmemenge A aus 2.1. ist leer. In dem Fall $A = \emptyset$ werden obige Fragen durch einen schönen Satz von Van de Ven [16] beantwortet:

Satz 2.3.
E sei ein unzerlegbares 2-Bündel über $\mathbb{P}^2$, so daß $E|l$ für alle Geraden l gleich zerfällt. Dann gilt:

$$P(E) \approx P(T)$$

Nun zu den Beispielen!

(a)

Eine exakte Sequenz $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ von Vektorraumbündeln über einem Raum X bestimmt ein Element $\delta(E) \in H^1(X, \mathrm{Hom}(E'',E'))$, welches Bild der Identität in $H^0(X, \mathrm{Hom}(E'', E''))$ unter dem Verbindungshomomorphismus $H^0(X, \mathrm{Hom}(E'',E'')) \to H^1(X, \mathrm{Hom}(E'',E))$ ist.

So erhält man eine Bijektion zwischen den Äquivalenzklassen der Ausdehnungen von E'' durch E' und $H^1(X, \mathrm{Hom}(E'',E'))$ bzw. $H^1(X, E' \otimes E''^*)$, eine Ausdehnung spaltet genau dann, wenn $\delta(E)$ die Nullklasse ist ([2]).

Satz 2.4.

Ein unzerlegbares 2-Bündel $E \to \mathbb{P}^2$ besitzt kein echtes Teilbündel.

Denn die Geradenbündel über $\mathbb{P}^2$ sind durch L^k, $k \in \mathbb{Z}$, gegeben.

Sei $0 \to L^{k_1} \to E \to L^{k_2} \to 0 \in H^1(\mathbb{P}^2, L^{k_1-k_2})$ eine Ausdehnung, wegen $H^1(\mathbb{P}^2, L^k) = 0$ (siehe [12]) gilt $E \approx L^{k_1} \oplus L^{k_2}$.

Schwarzenberger hat in [10] gezeigt, daß man durch endlich viele geeignete σ-Prozesse zu einer Fläche $\pi : \tilde{\mathbb{P}} \to \mathbb{P}^2$ gelangen kann, so daß π^*E ein Teilbündel besitzt. Nun sollen Bündel untersucht werden, die nach einem einzigen σ-Prozess schon reduzibel sind.

Durch einen σ-Prozess in einem Punkt $p \in \mathbb{P}^2$ erhält man die Hirzebruchfläche Σ_1.

e sei deren exzeptioneller Divisor und f der Divisor, der durch eine Faser des $\mathbb{P}^1$-Bündels Σ_1 gegeben ist. e, f mögen gleichzeitig die durch diese Divisoren definierten Homologieklassen in

$H_2(\sum_1, \mathbb{Z})$ bezeichnen. M,N seien die durch e, f definierten Geradenbündel auf $\sum_1$. Sie besitzen jeweils Schnitte, die genau auf e bzw. f von 1. Ordnung verschwinden.

Im folgenden sind die Chernschen Klassen $c_i(E)$, $i = 1,2$, eines Bündels E aufgefaßt als Homologieklassen in $H_{4-2i}(\sum_1, \mathbb{Z})$.

$\chi(E) = \sum_i (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H^i(\sum_1, E)$ sei die Euler-Poincaré-Charakteristik von E. $\chi(\sum_1) = \chi(T)$ die Euler-Poincaré-Charakteristik der Fläche $\sum_1$.

Ist $L \to F$ ein Geradenbündel über einer algebraischen Fläche F, welches durch einen Divisor g induziert wird und sind c_1, c_2 die Chernschen Klassen von F, so besagt der Satz von Riemann-Roch (siehe [17] § 20)

$$\chi(F) = \frac{1}{12}\,(c_1^2 + c_2)\,,$$

$$\chi(L) = \frac{1}{2}\,(g^2 + g \cdot c_1) + \chi(F)$$

Mit den Ergebnissen aus [15] und dem Satz von Riemann-Roch folgt:

Satz 2.5.

(i) $H_2(\sum_1, \mathbb{Z}) \approx \{ae + bf \mid a,b \in \mathbb{Z}\}$. Für die Schnittzahlen gilt: $e^2 = -1$, $f^2 = 0$, $ef = 1$.

(ii) $c_1(\sum_1) = 2e + 3f$, $c_2(\sum_1) = 4$, $\chi(\sum_1) = 1$

(iii) $c_1(M) = e$, $c_1(N) = f$;
jedes Geradenbündel über $\sum_1$ ist isomorph zu einem $\dots$

Für das kanonische Bündel $K = K(\sum_1)$ gilt:

$$K \approx M^{-2} \otimes N^{-3} ;$$

Die Euler-Poincaré-Charakteristik berechnet sich zu

$$\chi(M^a \otimes N^b) = \frac{1}{2} a(1-a) + (1+a)b + 1$$

Wesentlich für das folgende ist es, die Kohomologie mit Koeffizienten in diesen Bündeln zu kennen.

Satz 2.6.

(i) $\dim H^0(M^0 \otimes N^b) = 0$, wenn $a < 0$ oder $b < 0$,

$= (a+1)(b-\frac{a}{2}+1)$, wenn $0 \leq a \leq b$,

$= (b+1)(\frac{b}{2}+1)$, wenn $0 \leq b < a$,

(ii) $\dim H^1(M^a \otimes N^b) = \frac{a^2}{2} - a(b + \frac{1}{2}) - b - 1$,

wenn $a < 0$ oder $b < 0$, und außerdem

$-b - 3 < 0$ oder $-a - 2 < 0$

$= \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(b - a) - a \cdot b$,

wenn einer der folgenden Fälle vorliegt:

(1) $a < 0$ oder $b < 0$, und außerdem

$0 \leq -b - 3 < -a - 2$,

(2) $0 \leq b < a$,

$= 0$ in den verbleibenden Fällen.

(iii) $\dim H^2(M^a \otimes N^b) = \dim H^0(M^{-a-2} \otimes N^{-b-3})$

(iv) $\dim H^q(M^a \otimes N^b) = 0$, wenn $q \geq 3$.

Der Beweis von (i) findet sich in [15] , mit dem Serre-Dualitätssatz folgt (iii); (iv) gilt wegen $\dim \sum_1 = 2$; (ii) folgt aus (i) und (iii) mit dem Satz von Riemann-Roch aus Satz 2.5. durch Rechnung.

Sei nun f eine Faser von $\sum_1$, e der exzeptionelle Divisor (er ist der ∞-Schnitt in $\sum_1 = P(1 \oplus L^{-1})$ und definiert das maximale Teilbündel 1 von $1 \oplus L^{-1}$).

s sei ein Schnitt in $\sum_1$, welcher e nicht trifft: $es = 0$.
s ist eine singularitätenfreie rationale Kurve auf $\sum_1$.

Satz 2.7.

(i) $\quad M^a \otimes N^b \mid f \approx L^a$,

(ii) $\quad M^a \otimes N^b \mid e \approx L^{b-a}$,

(iii) $\quad M^a \otimes N^b \mid s \approx L^b$.

Der Beweis ergibt sich aus $c_1 (M^a \otimes N^b \mid d) = (ae + bf) \cdot d$ für einen Divisor d auf $\sum_1$, den Schnittzahlenaussagen aus 2.5. und der Tatsache, daß ein Geradenbündel über $\mathbb{P}^1$ durch seinen Grad eindeutig bestimmt ist.

$\pi : F \to \mathbb{P}^2$ sei eine eigentliche Modifikationsabbildung und $e \subset F$ deren exzeptionelle Kurve, E sei ein holomorphes Vektorraumbündel über F, denn besagt ein Satz von Schwarzenberger ([10]):

Satz 2.8.

Die Bildgarbe $\pi_* E$ über $\mathbb{P}^2$ ist genau dann lokalfrei, liefert also ein Vektorraumbündel, wenn $E|e$ das triviale Bündel über e ist.

Nach Satz I. 5.1. gibt es über $\mathbb{P}^1$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ eine nicht spaltende Ausdehnung

$$(1) \qquad 0 \to L^{-k} \to 1 \to L^{k} \to 0 \ ,$$

dabei bezeichnet $1 = L^0 \oplus L^0$ das triviale 2-Bündel.
Jede nicht triviale Ausdehnung mit 1 als mittlerem Term hat wegen $c_1(1) = c_1(E') + c_1(E'') = 0$ auch diese Form.
Wir suchen Ausdehnungen

$$(2) \qquad 0 \to M^{a_1} \otimes N^{b_1} \to E \to M^{a_2} \otimes N^{b_2} \to 0$$

über Σ_1, deren Einschränkungen auf e von der Form (1) sind, dann ist wegen 2.7. $\pi_* E$ ein 2-Bündel über $\mathbb{P}^2$.

Aus der exakten Sequenz

$$0 \to M^{-1} \to \mathcal{O}_{\Sigma_1} \to \mathcal{O}_e \to 0 \ ,$$

wo $\mathcal{O}_{\Sigma_1}$ die Strukturgarbe von Σ_1 und $\mathcal{O}_e$ die triviale Fortsetzung der Strukturgarbe von e auf Σ_1 sind, bekommt man für $a, b \in \mathbb{Z}$ exakte Garbensequenzen

$$(3) \qquad 0 \to M^{a-1} \otimes N^{b} \to M^{a} \otimes N^{b} \to M^{a} \otimes N^{b} \mid e \to 0 \ .$$

mit zugehörigen exakten Kohomologiesequenzen

$$(4) \ldots \to H^1(\Sigma_1, M^{a} \otimes N^{b}) \xrightarrow{r} H^1(e, M^{a} \otimes N^{b} \mid e) \to H^2(\Sigma_1, M^{a-1} \otimes N^{b}) \to \ldots ,$$

dabei ist r die Restriktionsabbildung.

Setzt man nun $a = a_1 - a_2$, $b = b_1 - b_2$ und $k = a_1 - b_1 = b_2 - a_2$, und gilt $H^2(\Sigma_1, M^{a-1} \otimes N^b) = 0$, so ist r surjektiv. Man kann also zu jeder Ausdehnung (1) aus $H^1(e, L^{-2k})$ eine Ausdehnung (2) aus $H^1(\Sigma_1, M^a \otimes N^b)$ finden, die (1) fortsetzt.

Nach 2.6. gilt für $a > -1$ oder $b > -3$ stets $H^2(\Sigma_1, M^{a-1} \otimes N^b) = 0$. Sei nun $a_1 \geq a_2$, $b_1 \geq b_2$, so ist diese Bedingung erfüllt.

Für jedes r-Urbild (2) von (1) gilt nach 2.7.:

$$(5) \quad \begin{cases} M^{a_1} \otimes N^{b_1}|f \approx L^{a_1} \ , \ M^{a_2} \otimes N^{b_2}|f \approx L^{a_2} \\ M^{a_1} \otimes N^{b_1}|s \approx L^{b_1} \ , \ M^{a_2} \otimes N^{b_2}|s \approx L^{b_2} \end{cases}$$

Wegen Satz I.1.3 gilt dann

$$(6) \qquad E|f \approx L^{a_1} \oplus L^{a_2} = L^{b_1+k} \oplus L^{b_2-k} \ , \ E|s \approx L^{b_1} \oplus L^{b_2}$$

Jedes r-Urbild (2) von (1) führt also zu einem Bündel E mit dem in (6) beschriebenen Spaltungsverhalten. Es bleibt nachzuprüfen, ob verschiedene Urbilder verschiedene Bündel E definieren. Dazu dient das leicht zu beweisende ([8])

Lemma 2.8.

$0 \to E' \to E_1 \to E'' \to 0$ und $0 \to E' \to E_2 \to E'' \to 0$ seien zwei Ausdehnungen von E" durch E'. Jeder Homomorphismus $E' \to E''$, der nicht der Nullhomomorphismus ist, sei ein Isomorphismus. Die einzigen Endomorphismen von E' und E" seien von der Form $\lambda \cdot I$, $\lambda \in \mathbb{C}$, I Identität.
Dann sind die Bündel E_1 und E_2 genau dann isomorph, wenn es ein $\lambda \in \mathbb{C}^*$ gibt mit $\delta(E_1) = \lambda \cdot \delta(E_2)$.

Die Isomorphieklassen unzerlegbarer Bündel E, welche man als Ausdehnung von E" durch E' bekommt, stehen also in Bijektion mit den Punkten des projektiven Raumes $P(H^1(X, E' \otimes E''^*))$.

Für unsere Ausdehnungen (2) mit $a_1 \geq a_2$, $b_1 \geq b_2$ gilt

$\mathrm{Hom}\,(M^{a_1} \otimes N^{b_1}, M^{a_2} \otimes N^{b_2}) \approx M^{a_2-a_1} \otimes N^{b_2-b_1}$, nach 2.6. (i)

gilt dann

(7) $\dim H^0(\Sigma_1, M^{a_2-a_1} \otimes N^{b_2-b_1}) = 0, 1.$

Alle Voraussetzungen von 2.8. sind erfüllt.

Weiter gilt nach 2.6. (ii) in unserem Fall

(8) $\dim H^1(\Sigma_1, M^{a_1-a_2} \otimes N^{b_1-b_2}) = \frac{1}{2}(a^2 + b^2) + \frac{1}{2}(b-a) - a \cdot b$

$= 2k^2 - k,$

also unabhängig von b_1, b_2.

Lemma 2.9.

Sei $\pi : \Sigma_1 \to \mathbb{P}_2$ ein σ-Prozess. Bündel E_1 und E_2 mit lokalfreien Bildgarben $\pi_* E_1$ und $\pi_* E_2$ sind genau dann isomorph, wenn $\pi_* E_1$ und $\pi_* E_2$ sind.

Denn man hat nach [5] einen Epimorphismus von Garben

$$\pi^* \pi_* E_i \to E_i .$$

welcher auch einen Epimorphismus der Bündel induziert, der wegen der Gleichheit der Faserdimension ein Isomorphismus ist.

Ist (Σ_1, e) durch Aufblasen aus $(\mathbb{P}^2, p)$ entstanden, so ist das strikte Urbild jeder Geraden l durch p eine Faser in Σ_1, das strikte Urbild jeder Geraden l, die p nicht trifft, ist ein Schnitt s in Σ_1, welcher e nicht schneidet.

Faßt man zusammen, so ergibt sich folgendes

Theorem IV

Zu jedem Punkt $p \in \mathbb{P}^2$, jedem Paar ganzer Zahlen (b_1, b_2) mit $b_1 \geq b_2$ und jeder natürlichen Zahl k gibt es eine durch $\mathbb{P}(H^1(\Sigma_1, M^{b_1-b_2+2k} \otimes L^{b_1-b_2})$ parametrisierte $k(2k-1)-1$ dimensionale Familie von unzerlegbaren holomorphen 2-Bündeln E über $\mathbb{P}^2$ mit folgendem Zerfällungsverhalten:

$$E|l \approx L^{b_1} \oplus L^{b_2}, \quad \text{falls } p \notin l$$

$$E|l \approx L^{b_1+k} \oplus L^{b_2-k}, \quad \text{falls } p \in l.$$

Je zwei Bündel derselben Familie sind nicht isomorph.

(b)

Dieses Verfahren kann man natürlich verallgemeinern. Wir geben ein Beispiel dafür.

Die rationale Fläche F entstehe durch einmaliges Aufblasen von verschiedenen Punkten $p_1, \ldots, p_n$ aus $\mathbb{P}^2$.

$\pi : F \to \mathbb{P}^2$ sei die Modifikationsabbildung und $e_\nu = \pi^{-1}(p_\nu)$ die exzeptionellen Kurven auf F. Die Schnittmatrix der e_ν ist die negative Einheitsmatrix. M_ν seien die durch e_ν induzierten Geradenbündel. Sei $M = M_1 \otimes \ldots \otimes M_n$ und e der Divisor $e_1 + e_2 + \ldots + e_n$. Es gilt $M|e_\nu \approx L^{-1}$.

Gesucht sind Ausdehnungen folgender Art:

(1) $0 \to M \to E \to M^* \to 0 \in H^1(F, M^2)$ mit $E|e_\nu = 1$

Wie unter (a) gehen wir aus von der exakten Sequenz

(2) $0 \to \mathcal{O}_F \to M \xrightarrow{r} M|e \to 0$, $\mathcal{O}_F$ Strukturgarbe von F.

Tensoriert man (2) mit M, so sieht die zugehörige Kohomologiesequenz so aus:

(3) $\ldots \to H^1(F, M^2) \xrightarrow{r} H^1(e, M^2|e) \to H^2(F, M) \to \ldots$

Es ist $H^1(e, M^2|e) \approx \bigoplus_{\nu=1}^{n} H^1(e_\nu, M^2|e_\nu) \approx \bigoplus_{\nu=1}^{n} H^1(e_\nu, L^{-2})$

Gesucht ist also ein Urbild für ein n-tupel folgender Ausdehnung

(4) $0 \to L^{-1} \to 1 \to L \to 0 \in H^1(\mathbb{P}^1, L^{-2})$

Dazu ist die Surjektivität von r hinreichend, die aus $H^2(F, M) = 0$ folgen würde.

Um $H^2(F, M) = 0$ nachzuweisen, betrachten wir die zu (2) gehörende Kohomologiesequenz

(5) $\ldots \to H^2(F, \mathcal{O}_F) \to H^2(F, M) \to H^2(e, M|e) \to \ldots$

Da e eindimensional ist, folgt $H^2(e, M|e) = 0$. Da $\dim H^q(F, \mathcal{O}_F)$ eine birationale Invariante ist und F birational äquivalent zu $\mathbb{P}^2$ ist, folgt $H^2(F, \mathcal{O}_F) = 0$.

Sei l eine Gerade in $\mathbb{P}^2$, auf der n_o $(0 \leq n_o \leq n)$ der Punkt p_ν liegen. Das strikte Urbild von l ist ein Divisor d auf F.

Wie unter Satz 2.7. folgt aus $(e_1 + e_2 + \ldots + e_r)\, d = n_o$.

$$M|d \approx L^{n_o} \tag{6}$$

Die Einschränkung von (1) auf d liefert

$$0 \to L^{n_o} \to E|d \to L^{-n_o} \to 0 \in H^1(\mathbb{P}^1, L^{2n_o}) = 0, \tag{7}$$

somit $E|d \approx L^{n_o} \oplus L^{-n_o}$.

Wir fassen zusammen zu

Satz 2.10.

Zu je endlich vielen Punkten aus $\mathbb{P}^2$ gibt es ein holomorphes 2-Bündel E über $\mathbb{P}^2$ mit folgendem Zerfällungsverhalten:

$$E|l \approx L^n \oplus L^{-n} ,$$

dabei bezeichnet n die Anzahl der vorgegebenen Punkte, die auf l liegen.

(c)

Die homogenen Koordinaten von $\mathbb{P}^2$ seien mit (x_o, x_1, x_2), die Geradenkoordinaten von $\mathbb{P}_2^*$ mit (a_o, a_1, a_2) bezeichnet. $(a_o, a_1, a_2) \in \mathbb{P}_2^*$ bestimme also die

Gerade $l = \{a_o x_o + a_1 x_1 + a_2 x_2 = 0\}$ in $\mathbb{P}^2$.

Sei $A = \{a_o = 0\} \cup \{a_1 = 0\} \cup \{a_2 = 0\} \subset \mathbb{P}_2^*$.

Durch $\varphi(x_o, x_1, x_2) = (x_o^2, x_1^2, x_2^2)$ erhalten wir eine 2-fache Überlagerung $\varphi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^2$.
T sei wieder das Tangentialbündel von $\mathbb{P}^2$.

Satz 2.11.

$E = \varphi^* T$ ist ein holomorphes 2-Bündel über $\mathbb{P}^2$ mit folgendem Zerfällungsverhalten:

(i) $\quad E|l \approx L^3 \oplus L^3 \quad$ für $\quad l \notin A,$

(ii) $\quad E|l \approx L^2 \oplus L^4 \quad$ für $\quad l \in A.$

Zu je drei nicht kollinearen Punkten der Ebene gibt es ein 2-Bündel E, welches auf einer Geraden aus der Vereinigung durch diese Punkte wie unter (ii) und sonst wie in (i) zerfällt.

Der Beweis ergibt sich aus 2.2., sofern man gezeigt hat:

$\varphi(l)$ ist eine Doppelgerade für $l \in A$,

$\varphi(l)$ ist ein regulärer Kegelschnitt, falls $l \notin A$.

Zu dem Zweck faktorisiere man φ in eine Einbettung $\psi : \mathbb{P}^2 \to \mathbb{P}^5$ und eine Projektion $\chi : \mathbb{P}^5 \to \mathbb{P}^2$ wie folgt.

Man bette $\mathbb{P}^2$ als Veronesefläche in den $\mathbb{P}^5$ ein, sind also $(x_{oo}, x_{o1}, x_{o2}, x_{11}, x_{12}, x_{22})$ homogene Koordinaten des $\mathbb{P}^5$, so sei

(1) $\quad \psi(x_o, x_1, x_2) = (x_o^2, x_o x_1, x_o x_2, x_1^2, x_1 x_2, x_2^2)$

Die Gerade $l = (a_o, a_1, a_2)$ wird dann auf einen Kegelschnitt einer Ebene e_a im $\mathbb{P}^5$ abgebildet. e_a wird durch folgende Gleichungen beschrieben:

(2)
$$a_o x_{oo} + a_1 x_{o1} + a_2 x_{o2} = 0$$
$$a_o x_{o1} + a_1 x_{11} + a_2 x_{12} = 0$$
$$a_o x_{o2} + a_1 x_{12} + a_2 x_{22} = 0 \ .$$

Die Ebene e sei Durchschnitt folgender Hyperebenen

(3)
$$h_i = \{x_{ii} = 0\} \ , \ i = 0, 1, 2.$$

e ist weder eine Tangentialebene an $F_2^4 := \varphi(\mathbb{P}^2)$ noch eine der Ebenen e_a.

$\chi(x_{oo}, x_{o1}, x_{o2}, x_{11}, x_{12}, x_{22}) = (x_{oo}, x_{11}, x_{22})$ sei die Projektion aus e auf eine dazu windschiefe Ebene.

Ist $e \cap e_a \neq \emptyset$, so geht $l = (a_o, a_1, a_2)$ über in eine Doppelgerade, für $e \cap e_a = \emptyset$ aber in einen Kegelschnitt.

$e \cap e_a \neq \emptyset$ gilt genau dann, wenn das aus (2) und (3) bestehende Gleichungssystem eine nichttriviale Lösung besitzt. Seine Determinante berechnet sich zu $-2a_o a_1 a_2$.

Der Zusatz ergibt sich aus der Tatsache, daß es zu drei nicht kollinearen Urbild- und drei nicht kollinearen Bildpunkten eine Kollineation χ der Ebene gibt, $\chi^* E$ leistet das Gewünschte.

(d)

Zum Abschluß sei ein Bündel E vorgestellt, bei dem A ein Kegelschnitt ist. Meines Wissens war es das erste nicht uniforme Bündel mit $A \neq \emptyset$, das man untersuchte. Es wurde unabhängig von W. Hodge und A. Van de Ven gefunden, in verallgemeinerter Form wurde es in [10] publiziert und mit anderen Methoden untersucht. Wir sind ihm schon in I. 4.2. (ii) begegnet:

$\mathbb{P}^1$ sei als rationale Normkurve r^3 in den $\mathbb{P}^3$ eingebettet. $\mathbb{P}^2$ ist isomorph zum 2-fach symmetrischen Produkt $S^2(\mathbb{P}^1)$. $S^2(\mathbb{P}^1)$ sei als Sekantenvarietät in den $\mathbb{P}^3$ eingebettet. Man hat eine kanonische Einbettung in die Graßmannmannigfaltigkeit aller Geraden im $\mathbb{P}^3$. Das nach $\mathbb{P}^2$ zurückgeholte universelle Bündel E ist nicht uniform. A wird gegeben durch die Geraden, die tangential zu einem Kegelschnitt sind.

Literaturverzeichnis

[1] M.F. Atiyah: Complex fibre bundles and ruled surfaces, Proc. London Math. Soc.(3) 5 (1955), 407 - 34.

[2] _____: Complex analytic connections in fibre bundles, Trans. Amer. Math. Soc. 85 (1957), 181 - 207.

[3] M. Artin: On the Solutions of Analytic Equations, Inventiones math. 5 (1968), 277 - 291.

[4] G.D. Birkhoff: A theorem on matrices of analytic functions, Math.Ann. 74 (1913), 122 - 133.

[5] H. Grauert und R. Remmert: Bilder und Urbilder analytischer Garben, Ann. Math. 68 (1958), 393 - 442.

[6] A. Grothendieck: Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann. Am. J.Math. 79 (1957), 121 - 138.

[7] K. Kodaira und D.C. Spencer: On deformations of complex analytic structures. Ann.Math. 67 (1958), 328 - 466.

[8] M.S. Narasimhan und S. Ramanan: Moduli of vector bundles on a compact Riemann surface. Ann. of Math.89, (1969), 14 - 51.

[9] H. Röhrl: On holomorphic families of fibre bundles over the Riemannian sphere. Mem. Coll. Sc. Univ. of Kyoto, Ser. A 33 (1961), 434 - 477

[10] R.L.E. Schwarzenberger: Vector bundles on the projective plane. Proc. London Math. Soc. (3) 11 (1961), 623 - 40.

[11] _____: Vector bundles on albebraic surfaces. Proc. London Math. Soc. (3) 11 (1961), 601 - 22.

[12] J.P. Serre: FAC. Ann. of Math. 61 (1955) 197-278.

[13] J. Simonis: A class of indecomposable algebraic vector bundles. Math.Ann. 192 (1971), 262 - 278.

[14] T. Suwa: Stratification of Local moduli spaces of Hirzebruch manifolds.
Proc. of the Rice Conference on Complex Analysis, Vol. 59, No 2, (1973), 129 - 146.

[15] A. Van de Ven: On holomorphic fields of complex line elements with isolated singularities.
Ann. Inst. Fourier, Grenoble, 14, 1 (1964), 99 - 130.

[16] _____: On Uniform Vector bundles.
Math. Ann. 195 (1972), 245 - 248.

[17] F. Hirzebruch: Topological methods in algebraic geometry.
Grundl. Math. Wiss. 131, Berlin-Heidelberg-N.York: Springer 1966

Lebenslauf

Am 1.4.1944 wurde ich als einziges Kind des Einkäufers Wilhelm Mülich und dessen Ehefrau Marie, geb. Diekjobst, in Bad Hall in Österreich geboren. 1945 zogen wir nach Pivitsheide, Kreis Detmold.

Dort besuchte ich von 1950 bis 1954 die Volksschule, anschließend bis 1963 das math.-naturwissenschaftliche Gymnasium in Detmold bis zum Abitur.

Ab Sommersemester 1963 studierte ich in Göttingen an der Georg-August-Universität Mathematik. Vordiplomprüfung legte ich am 19.7.1965 dort ab, die Diplomprüfung mit einer Arbeit über holomorphe Vektorraumbündel über Riemannschen Flächen am 22.10.1969. Hauptarbeitsgebiet seit dem Vordiplom ist unter Anleitung von Prof. Dr. H.Grauert die komplexe Analysis. Nach einjähriger Lehrertätigkeit am Richenza Gymnasium in Northeim wurde ich am 1.10.1971 Verwalter einer wissenschaftlichen Assistentenstelle, am 21.11.1972 zum wissenschaftlichen Assistenten ernannt.

Seit 1969 bin ich mit der Volksschullehrerin Margit Mülich, geb. Kuckuck, verheiratet. Wir wohnen mit unserer am 19.11.1971 geborenen Tochter Nicola seither in Langenholtensen, Kreis Northeim.